6/5/19

- Διαγωνοποίηση πινάκων (γρ. απεικονίσεις)

$A = S\Lambda S^{-1}$ με Λ διαγώνιος

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$$

Δεν είναι όλοι οι πίνακες διαγωνοποιήσιμοι
A διαγωνοποιήσιμος <=> έχει n γραμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα <=> πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής $= \dim V(\lambda_i)$

- $\chi_A(\lambda) \xleftrightarrow{\text{σχετίζεται}}$ ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$

A διαγωνοποιήσιμος <=> $m_A(\lambda)$ γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.
Επίσης, το $m_A(\lambda)$ βοηθάει εγώ να υπολογίζω διάφορες δυνάμεις ενός πίνακα A.

- Ρίζα ενός πίνακα A, αν υπάρχει $A = B^m = S\Lambda S^{-1} = S(\Lambda')^m S^{-1}$

Ευκλείδιος χώρος

$(V^n, \langle -,- \rangle)$

$\langle -,- \rangle : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ $(/\mathbb{C})$ (4 ιδιότητες)

- Μήκος, γωνία, προβολή (με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου)
  - προβολή διανύσματος σε διάνυσμα
  - — " — " — " — διανυσματικό υπόχωρο

- G-S διαδικασία $\leftrightarrow$ {γραμ. ανεξάρτητο υποσύνολο} $\leftrightarrow$ {ορθοκανονικ...

$W \leq V \Rightarrow \exists W^{\perp} \leq V$ τ.ω. $\underline{W \perp W^{\perp}}$ κ' $\underline{W \oplus W^{\perp} = V}$

- Ορθογώνιοι πίνακες (πραγματικός) $\Leftrightarrow$ $\boxed{A^{-1} = A^t}$
  - Ιδιότητα: Ορθογώνιος πραγ. πίνακας $\xrightarrow{\text{δίνει}}$ ορθοκανονική βάση κ' διατηρεί μήκη κ' γωνίες

- Ισομετρίες σε διανυσματικούς χώρους

Ισομετρία: διατηρεί τα μήκη

γραμμικές ισομετρίες $\leftrightarrow$ πίνακας μιας γραμ. ισομετρίας είναι ορθογώνιος.

- Συμμετρικοί πραγματικοί πίνακες $\Leftrightarrow$ $\boxed{A = A^t}$

Συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται

$A = A^t \Rightarrow A = P \Lambda P^t$ (P: ορθογώνιος, Λ: διαγώνιος)

Ο προσαρτημένος ενός πίνακα: $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle$

A αυτοπροσαρτημένος, όταν ισούται με τον προσαρτημένο $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ συμμετρικός.

Τετραγωνικές μορφές

$Q: V \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ σώμα V ευκλείδιος χώρος
Δηλ. αν $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ βάση κ' $A = (a_{ij})$ $n \times n$ πίνακας συμμετρικός.

$u \in V$ τυχαίο $\Rightarrow u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$
$Q(u) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j$ σαν πολυώνυμο ως προς $x_1, \ldots, x_n$ το οποίο έχει βαθμό 2 κ' είναι ομογενές.
(Το u καθορίζεται πλήρως από τα $(x_1, \ldots, x_n)$)

- Υπενθύμιση: ομογενές: $3x^{12} - xy^{11} + 3x^3y^2 - x^4y^8$
  όχι ομογενές: $3x^2 + 2x^5y^7 - y^8 - x^6y^3 = f(x,y)$
  $\deg f = 12$

$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j$

πχ: 1) Η τετραγωνική μορφή $Q(x,y) = 2x^2 + 3xy - 7y^2$ μπορεί να γραφεί ως $Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2) $Q(x,y,z) = x^2 + 7y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz + 6yz$

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 4/2 & -2/2 \\ 4/2 & 7 & 6/2 \\ -2/2 & 6/2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Ερώτημα: Μπορεί η Q να γραφεί απλούστερα, ώστε να βοηθάει στους υπολογισμούς;

- ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω A ένας $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας κ' $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του σε φθίνουσα διάταξη. (δηλ. $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$). Αν $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\| = 1$, τότε $\boxed{\lambda_1 \ge u A u^t \ge \lambda_n}$

* **Απόδειξη:** $n=3$ A: πραγματικός συμμετρικός $\Rightarrow$ υπάρχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων.

$Au_i^t = \lambda_i u_i^t$ κ' $\{u_1, \dots, u_n\}$ ορθοκανονικό

Έστω $u \in \mathbb{R}$ με $\|u\| = 1$ $\quad u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$$uAu^t = (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)\,A\,(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)^t =$$
$$= (x_1u_1A + x_2u_2A + x_3u_3A)(x_1u_1^t + x_2u_2^t + x_3u_3^t) =$$
$$= x_1u_1Ax_1u_1^t + x_1u_1Ax_2u_2^t + x_1u_1Ax_3u_3^t +$$
$$+ x_2u_2Ax_1u_1^t + x_2u_2Ax_2u_2^t + x_2u_2Ax_3u_3^t +$$
$$+ x_3u_3Ax_1u_1^t + x_3u_3Ax_2u_2^t + x_3u_3Ax_3u_3^t =$$
$$= x_1^2u_1Au_1^t + x_1x_2u_1Au_2^t + x_1x_3u_1Au_3^t +$$
$$+ x_2x_1u_2Au_1^t + x_2^2u_2Au_2^t + x_2x_3u_2Au_3^t +$$
$$+ x_3x_1u_3Au_1^t + x_3x_2u_3Au_2^t + x_3^2u_3Au_3^t =$$
$$= \lambda_1x_1^2\underbrace{u_1u_1^t}_{1} + \lambda_2x_1x_2\underbrace{u_1u_2^t}_{0} + \lambda_3x_1x_3\underbrace{u_1u_3^t}_{0} +$$
$$+ \lambda_1x_2x_1\underbrace{u_2u_1^t}_{0} + \lambda_2x_2^2\underbrace{u_2u_2^t}_{1} + \lambda_3x_2x_3\underbrace{u_2u_3^t}_{0} +$$
$$+ \lambda_1x_3x_1\underbrace{u_3u_1^t}_{0} + \lambda_2x_3x_2\underbrace{u_3u_2^t}_{0} + \lambda_3x_3^2\underbrace{u_3u_3^t}_{1} =$$
$$= \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2$$

$$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$
$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_1x_2^2 + \lambda_1x_3^2 \geq uAu^t = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 \geq$$
$$\geq \lambda_3x_1^2 + \lambda_3x_2^2 + \lambda_3x_3^2 = \lambda_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \geq uAu^t \geq \lambda_3$$

πχ. 1) Να βρεθεί η μέγιστη κ' η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ για $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 4/2 \\ 4/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{A = A^t}$$

$$\lambda_1 \geq (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \lambda_2$$

όπου λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2^2 = (1+\lambda)(3-\lambda)$$

$\lambda_1 = 3$ κ' $\lambda_2 = -1$

$$3 \geq x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 \geq -1$$

No. Date

$V(3) = \langle (1,1) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$ αφού $\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$

$V(-1) = \langle (1,-1) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$ αφού $\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = -y$

$(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} = 1/2 + 1/2 + 2 = 3 = \lambda_1$

$(1/\sqrt{2})^2 + (-1/\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 1/\sqrt{2}\,(-1/\sqrt{2}) = 1/2 + 1/2 - 2 = -1 = \lambda_2$

2) Αν η τετραγωνική μορφή $ax^2 + 4xy + by^2$ λαμβάνει τιμές από 2 εως -1 για (x,y) ώστε $x^2+y^2=1$, τότε να βρεθούν τα a, b.

$ax^2 + 4xy + by^2 = (x \ \ y)\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Γνωρίζω από το θεώρημα ότι $\lambda_1 = 2 \geq (x\,y)\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \underset{-1}{\lambda_2}$

Βρες τα a, b ώστε ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ να έχει ιδιοτιμές το 2 κ -1

$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & 2 \\ 2 & b-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - 4$

$\chi_A(2) = 0$ κ $\chi_A(-1) = 0$

$(a-2)(b-2) - 4 = 0 \Rightarrow ab - 2a - 2b + 4 - 4 = 0$

$(a+1)(b+1) - 4 = 0 \Rightarrow ab + a + b + 1 - 4 = 0$

$ab - 2a - 2b = 0 \Rightarrow ab = 2a + 2b = 3 - a - b$

$\underbrace{ab + a + b = 3 \qquad 3a + 3b = 2 \Rightarrow a = 1 - b}$

$(1-b)b + 1 - b + b = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b - b^2 - 3 = 0 \Rightarrow b^2 - b + 3 = 0 \Rightarrow b$ κ μετά το a.